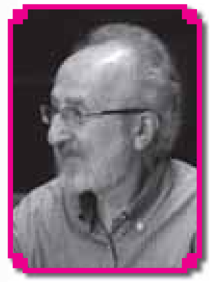
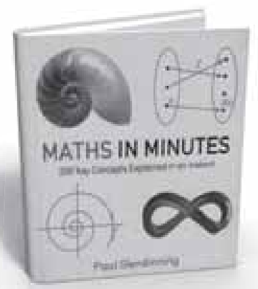
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور



ریاضیات در چند دقیقه



مسئله‌های هیلبرت

مسئله‌های هیلبرت فهرستی از ۲۳ مسئلهٔ پژوهشی ریاضیات است که توسط **داوید هیلبرت**[1] در سال ۱۹۰۰ در «کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات» در پاریس مطرح شد. وی آن‌ها را به‌عنوان سرنخی برای توسعهٔ ریاضیات در قرن بیستم در نظر گرفت.

در سراسر سدهٔ ۱۸۰۰، دستگاه اکسیوماتیکی (اکسیوم یعنی اصل و اکسیوماتیک یعنی اصل موضوعی) که ابتدا توسط **اقلیدس اسکندریه‌ای**[2] مورد استفاده قرار گرفته بود، در حوزه‌های بسیاری به‌کار رفت. ریاضی‌دانان روش‌هایی را برای یافتن اکسیوم‌های معرف حوزه‌های مورد بررسی‌شان ـ برای مثال، در هندسه: نقاط، خطوط، خم‌ها و ویژگی‌هاشان ـ و سپس توسعهٔ این موضوعات از این اکسیوم‌ها از طریق منطق، گسترش داده بودند.

بسیاری از مسائل هیلبرت مرتبط با توسیع روش اکسیوماتیک، و راه‌حل‌هایشان به طرز قابل ملاحظه‌ای باعث پیشرفت ریاضیات شدند، گرچه اثر **کورت گودل**[3] به زودی نظرگاه خودِ نظریه‌های اکسیوماتیک را تغییر داد. این نظریه‌ها طریقی برای تنظیم فهرستی از معماهای ریاضی مشخص کردند که تا امروز نیز ادامه دارد.

پی‌نوشت‌ها

1. David Hilbert
2. Euclid of Alexandria
3. Kurt Gödel

قضایای ناتمامیت گودل

«قضایای ناتمامیت گودل»[1] دستاوردهای قابل‌توجهی هستند که چگونگی ریاضیات اکسیوماتیک را از منظر ریاضی‌دانان تغییر دادند. قضایای مزبور که توسط ریاضی‌دان آلمانی، **کورت گودل**[2] در اواسط دهۀ ۱۹۲۰ و اوایل دهۀ ۱۹۳۰ توسعه یافتند، با توجه به روش رمزبندی گزاره‌ها در نظریه‌های اکسیوماتیک، و روش نشان دادن چگونگی تعدیل گزاره‌ها توسط قواعد منطق، رشد یافتند.

گرچه روش اکسیوماتیک برای توصیف میدان‌های گوناگون ریاضیات، با موفقیت بسیار به‌کار رفته بود، پاره‌ای از نظریه‌ها نشان داده بودند که در خودشان به مجموعه‌های نامتناهی اکسیوم‌ها نیاز دارند، و بنابراین ریاضی‌دانان نگران یافتن راه‌های صوری اثبات تمامیت و سازگاری مجموعۀ داده شده‌ای از اکسیوم‌ها بودند.

یک مجموعه از اکسیوم‌ها «تمام»[3] در نظر گرفته می‌شود اگر توان اثبات یا نقض هر گزارۀ مفروض در زبان مناسبش را داشته باشد. در حالی‌که مجموعه‌ای از اکسیوم‌ها «سازگار»[4] است اگر نتوان هیچ گزاره‌ای تشکیل داد که بتواند هم اثبات شده هم نقض شده باشد.

قضیۀ اول گودل بر این است که:

در هر نظریۀ اکسیوماتیک (مناسب)، گزاره‌هایی موجودند که در داخل آن نظریه دارای معنی‌اند، اما نمی‌توانند در داخل آن نظریه به‌عنوان راست یا دروغ اثبات شوند.

این قضیه بدین معنی است که اکسیوم‌های یک نظریه، که ممکن است امیدوار باشیم که آن نظریه را به‌طور کامل توصیف کنند، هیچ‌گاه نمی‌توانند این کار را انجام دهند، و همواره امکان دارد که تعداد اکسیوم‌ها افزایش یابد.

پیچیدگی این ماجرا آنقدرها ناجور نبود که پیچیدگی دیگری، که شامل سازگاری درونی مجموعه‌های اکسیوم‌ها بود، آشکار شد:

تنها ممکن است بتوانیم اثبات کنیم که مجموعه‌ای (مناسب) از اکسیوم‌ها ناسازگار است، اما نه اینکه اثبات کنیم سازگارند.

به عبارت دیگر، هیچ‌گاه نمی‌توان مطمئن بود که مجموعه‌ای از اکسیوم‌ها شامل تناقضی پنهان نباشد.

دستاوردهای گودل آثاری عمیق بر فلسفۀ ریاضی دارد، اما به‌طور کلی گرایش ریاضی‌دانان عملی این است که کارشان را مانند اینکه چیزی تغییر نکرده است، انجام دهند.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Gödel's incompleteness theorems
2. Kurt Gödel
3. complete
4. consistent

اکسیوم انتخاب

«اکسیوم انتخاب»[1] قاعده‌ای اساسی است که اغلب به فهرست اکسیوم‌های به‌کار رفته در تعریف اندیشۀ ریاضی افزوده می‌شود. این اکسیوم به‌طور ضمنی در استدلال قطری کانتور و بسیاری از دیگر اثبات‌های ریاضی که شامل این فرض‌اند که فهرست‌های نامتناهی وجودی مجرد دارند، و می‌توانند یک مجموعه از انتخاب‌های نامتناهی را تشکیل دهند، به‌کار رفته است.

به‌گونه‌ای دقیق‌تر، این اثبات بر آن است که با معلوم بودن تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های ناتهیِ شامل بیش از یک عضو، انتخاب دنباله‌ای نامتناهی از اعضا با دقیقاً یک عضو از هر مجموعه، امکان‌پذیر است.

در نگاه گروهی این موضوع بی‌معنی به‌نظر می‌رسد ـ نامتناهی بار دیگر با رأس منکر خود سر برآورده است ـ اما قاعده‌ای که طی چنین شیوه‌ای را مجاز می‌کند، اکسیوم انتخاب است.

البته می‌توان اکسیوم‌های دیگری را چنان انتخاب کرد، که اجازه دهند اکسیوم انتخاب به‌عنوان قضیه مطرح شود، اما هر روایتی که به‌کار گرفته شود، افزودن مزبور به مجموعۀ پایه‌ای قواعد منطقی برای مجاز کردن استدلالاتی چنین، لازم است.

***پی‌نوشت‌ها**

1. axiom of choice